ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Цель работы:

– исследовать переходные процессы в линейной цепи второго порядка при подключении к источнику постоянного напряжения;

– установить влияние параметров исследуемой цепи на характер переходного процесса;

– исследовать и измерить параметры переходного процесса с помощью электронного осциллографа.

Краткая теория

Одна из распространенных задач расчета переходных процессов заключается в анализе переходных процессов в последовательной R, L, C цепи при подключении её к источнику постоянного напряжения (рис. 8.1).

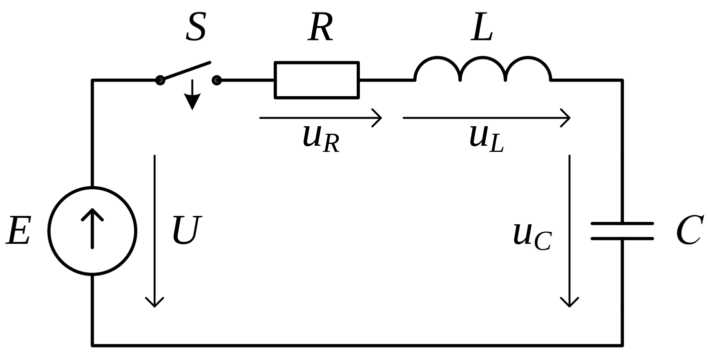

Рис. 8.1. Схема для расчета переходного тока и напряжения при подключении последовательной RLC-цепи к источнику напряжения: E – источник постоянного напряжения; S – ключ; R – резистор; L – катушка индуктивности; C – конденсатор

Запишем уравнение второго закона Кирхгофа для момента времени t_+ после коммутации:

$$U = u_L + u_R + u_C = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t idt. \qquad (8.1)$$

Уравнение после дифференцирования приводится к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0 \qquad (8.2)$$

Уравнение является однородным, из чего следует, что данное уравнение соответствует свободному режиму и переходной ток равен свободному (i = $i_{св}$). В установившемся режиме после заряда конденсатора от источника постоянного напряжения вынужденный ток будет равен нулю ($i_{вын}$ = 0). Обратите внимание на тот факт, что также будет выглядеть уравнение (8.2) и при переключении цепи от источника напряжения на короткое замыкание.

Однородному дифференциальному уравнению соответствует характеристическое уравнение

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0, \qquad (8.3)$$

корни которого равны:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \qquad (8.4)$$

где $\delta = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания; $\omega_0 = \frac{1}{LC}$ угловая резонансная частота контура.

Корни уравнения могут быть действительными при $\delta \geq \omega_0$ или комплексными сопряженными при $\delta < \omega_0$. Для действительных корней решение однородного дифференциального уравнения – ток

$i_{св}$ – имеет апериодический характер, а для комплексных – колебательный.

Наименьшее активное сопротивление, соответствующее предельному случаю апериодического процесса, называется критическим:

$$R_{кр} = 2\sqrt{L/C}\ . \tag{8.5}$$

Рассмотрим три возможных случая при включении цепи R, L, C на постоянное напряжение.

Апериодический режим имеет место при $\delta < \omega_0$, т.е. $R > R_{кр}$ или $Q < 0{,}5$. Корни характеристического уравнения получаются действительными отрицательными числами:

$$p_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \qquad p_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \tag{8.6}$$

причем $|p_1| < |p_2|$.

Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$i = i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \tag{8.7}$$

Постоянные интегрирования определяются из двух начальных условий. Независимое начальное условие записывается на основе первого закона коммутации:

$$i\,(t_+ = 0) = i\,(t_-) = 0, \tag{8.8}$$

откуда уравнение переходного тока для момента времени t_+:

$$i\,(t_+ = 0) = 0 = A_1 + A_2 \ \ или \ \ A_1 = -A_2\,. \tag{8.9}$$

Второе зависимое начальное условие находится из уравнения второго закона Кирхгофа для схемы после коммутации при $t = t_+$:

$$Ri(t_+ = 0) + L\frac{di}{dt}(t_+ = 0) + u_C(t_+ = 0) = U \quad (8.10)$$

Так как $u_C(t_+) = u_C(t_-) = 0$, то зависимое начальное условие определяется выражением

$$\frac{di}{dt}(t_+ = 0) = \frac{U}{L} \quad (8.11)$$

Определяем производную переходного тока

$$\frac{di}{dt} = A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t} \quad (8.12)$$

и записываем ее для момента коммутации:

$$\frac{di}{dt}(t_+ = 0) = A_1 p_1 + A_2 p_2 = \frac{U}{L}. \quad (8.13)$$

Из уравнений (8.8) и (8.13) определяем постоянные интегрирования

$$A_1 = -A_2 = \frac{U}{L(p_1 - p_2)}, \quad (8.14)$$

где $p_1 - p_2 = 2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$.

Таким образом, переходный ток в апериодическом режиме определяется выражением

$$i = \frac{U}{L(p_1 - p_2)} e^{p_1 t} - \frac{U}{L(p_1 - p_2)} e^{p_2 t} =$$

$$= \frac{U}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (8.15)$$

Переходные напряжения на резисторе:

$$u_R = u_{R_{св}} = Ri = \frac{UR}{L(p_1 - p_2)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}); \qquad (8.16)$$

на индуктивности:

$$u_L = u_{L_{св}} = L\frac{di}{dt} = \frac{U}{p_1 - p_2}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}); \qquad (8.17)$$

наконец, на емкостном элементе:

$$U_C = U_{Cсв} + U_{Cвын} =$$

$$= \frac{1}{C}\int_0^t idt + U = \frac{U}{p_1 - p_2}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) + U \qquad (8.18)$$

На рис. 8.2 показана кривая переходного тока i для апериодического режима. Так как $|p_1| < |p_2|$, экспонента $A_1 e^{p_1 t}$ затухает медленнее, чем экспонента $A_2 e^{p_2 t}$.

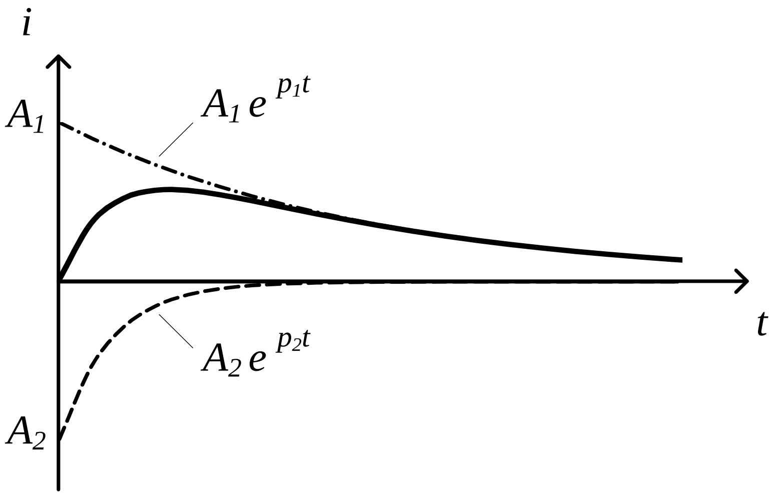

Рис. 8.2. График зависимости переходного тока от времени в апериодическом режиме

На рис. 8.3 приведены графики переходных напряжений U_C, U_L и переходного тока i с указанием характерных точек для моментов времени t_1, t_2.

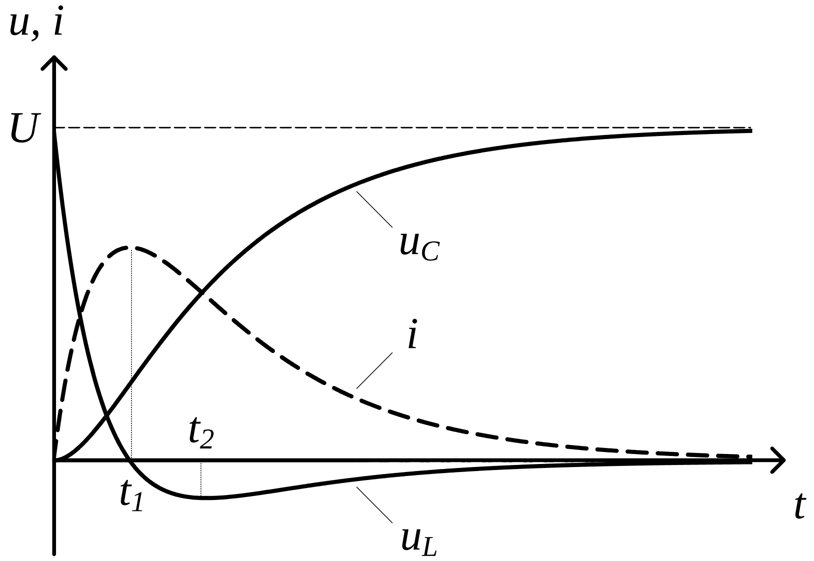

Рис. 8.3. Графики тока i и напряжений u_L и u_C для апериодического режима

Напряжение u_C монотонно возрастает от нуля до напряжения источника U. В момент времени t_1 ток достигает максимума, а кривая u_C становится более пологой. Это время можно рассчитать, приравняв к нулю производную тока:

$$t_1 = \frac{1}{p_1 - p_2} ln \frac{p_2}{p_1}. \tag{8.19}$$

В первый момент после коммутации напряжение на индуктивности равно напряжению источника, затем оно уменьшается и в момент времени t_1 становится равным нулю. Далее u_L становится отрицательным и в момент времени t_2 достигает некоторого максимума, после чего уменьшается и стремится к нулю, что связано с перегибом кривой тока i. Момент времени t_2 можно рассчитать, приравняв к нулю производную напряжения u_L:

$$t_2 = 2t_1. \tag{8.20}$$

Переходное напряжение u_R по форме повторяет график тока.

Колебательный (периодический) режим возникает в цепи при $\delta < \omega_0$ ($R < R_{кр}$) или при $Q > 0,5$. Корни характеристического уравнения (8.4) в этом режиме получаются комплексными и сопряженными (с отрицательной действительной частью):

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega_{св}, \quad (8.21)$$

где $\omega_{св} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – угловая частота свободных (собственных) колебаний тока и напряжений во время переходного процесса в цепи R, L, C.

Таким образом, при включении в RLC-цепь с большой добротностью источника постоянного напряжения переходные процессы в ней имеют колебательный характер. Ток в цепи и напряжения на элементах представляют собой гармонические функции, амплитуда которых экспоненциально уменьшается во времени. Колебательный характер переходного процесса в цепи связан с периодическим обменом энергией между емкостью и индуктивностью, а затухание колебаний объясняется потерями энергии в сопротивлении.

Корни p_1, p_2 характеристического уравнения (рис.8.4) расположены симметрично относительно оси абсцисс в левой полуплоскости на полуокружности с радиусом, численно равным резонансной частоте последовательного контура ω_0.

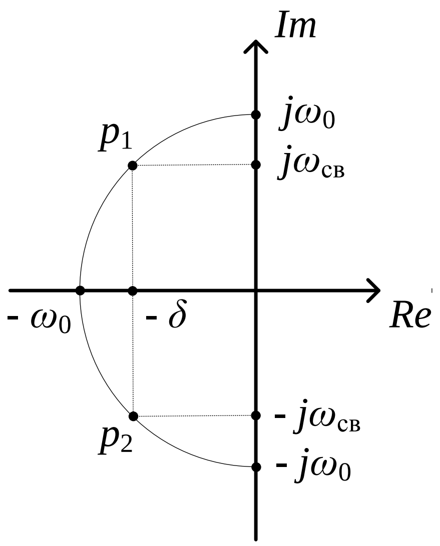

Рис. 8.4. Изображение корней характеристического уравнения для периодического затухающего режима в комплексной плоскости

Чем меньше коэффициент затухания δ, тем ближе к мнимой оси расположены корни уравнения, меньше различие между $\omega_{св}$ и ω_0 и медленнее затухание свободных процессов. В пределе, при δ = 0, корни характеристического уравнения располагаются на мнимой оси, частота свободных колебаний совпадает с резонансной частотой цепи, а колебательные процессы в цепи носят незатухающий характер. Таким образом, резонансная частота *RLC*-цепи численно равна частоте свободных колебаний цепи при δ = 0.

Период затухающих колебаний определим из угловой частоты свободных колебаний:

$$T_{св} = \frac{2\pi}{\omega_{св}}. \tag{8.22}$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения для колебательного режима в этом случае имеет вид

$$i = i_{св} = A_1 e^{-\delta t} \sin \omega_{св} t + A_2 e^{-\delta t} \cos \omega_{св} t. \tag{8.23}$$

Для определения постоянных интегрирования применяются начальные условия (8.10, 8.11). Из независимого начального условия следует:

$$0 = A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1, \tag{8.24}$$

откуда $A_2 = 0$ и переходный ток:

$$i = i_{св} = A_1 e^{-\delta t} \sin \omega_{св} t. \tag{8.25}$$

Пользуясь зависимым начальным условием, получим

$$\frac{U}{L} = A_1 \omega_{св}, \ \ откуда \ \ A_1 = \frac{U}{\omega_{св} L}. \tag{8.26}$$

Таким образом, переходный ток в колебательном (периодическом) режиме подчиняется закону:

$$i = i_{св} = \frac{U}{\omega_{св}L} e^{-\delta t} sin\ \omega_{св} t. \qquad (8.27)$$

График переходного тока в колебательном (периодическом) режиме приведен на рис. 8.5.

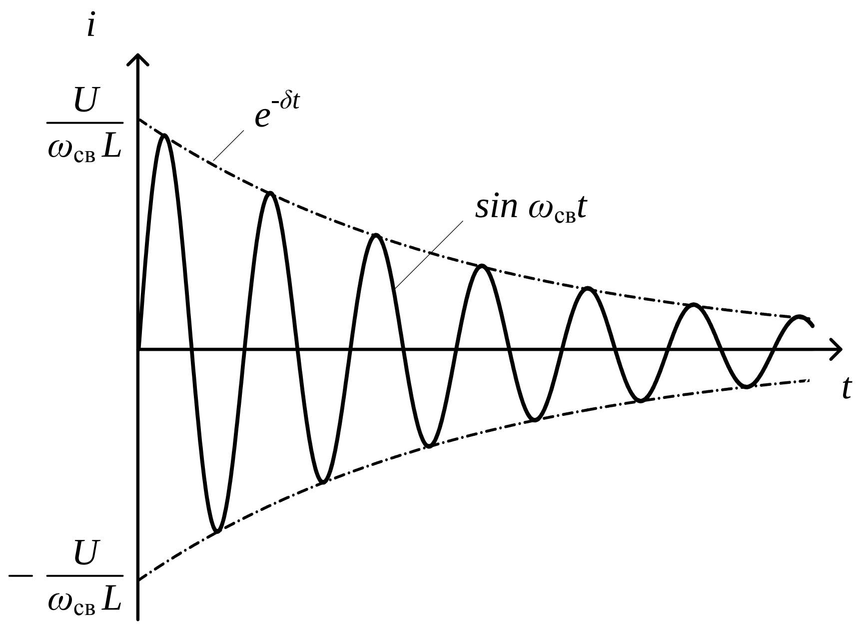

Рис. 8.5. Зависимость переходного тока в колебательном (периодическом) режиме от времени

Переходные напряжения на резисторе:

$$u_R = u_{Rсв} = Ri_{св} = \frac{RU}{\omega_{св}L} e^{-\delta t} sin\ \omega_{св} t; \qquad (8.28)$$

на катушке индуктивности:

$$u_L = u_{Lсв} = L\frac{di_{св}}{dt} = L\frac{U}{\omega_{св}L} e^{-\delta t}(\omega_{св} cos\omega_{св} t - \delta sin\ \omega_{св} t) =$$

$$= -\frac{U\omega_0}{\omega_{св}} e^{-\delta t} sin\,(\omega_{св} t - \psi); \qquad (8.29)$$

и на конденсаторе:

$$u_C = u_{Cсв} + u_{Cвын} = \frac{1}{C}\int i_{св} dt + U =$$

$$= U - \frac{U}{\omega_{св}} e^{-\delta t} (\omega_{св}\, cos\, \omega_{св} t + \delta\, sin\, \omega_{св} t) =$$

$$= U - \frac{U}{\omega_{св}} e^{-\delta t} (\omega_0\, sin\, \psi \cdot cos\, \omega_{св} t + \omega_0\, cos\, \psi \cdot sin\, \omega_{св} t) =$$

$$= U\left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_{св}} e^{-\delta t} \sin(\omega_{св} t + \psi)\right) \qquad (8.30)$$

где $\psi = arctg\,\frac{\omega_{св}}{\delta}$, $\omega_0 \sin\psi = \omega_{св}$, $\omega_0 \cos\psi = \delta$ (рис. 8.4).

Графические зависимости напряжений во время переходного процесса представлены на рис. 8.6. График тока i по форме совпадает с напряжением u_R . Ток совершает затухающие колебания с угловой частотой $\omega_{св} = 2\pi/T_{св}$ относительно оси времени, стремясь к нулю.

Коэффициент затухания δ и угловая частота $\omega_{св}$ зависят от параметров цепи R, L, C. При увеличении δ за счет увеличения R уменьшается $\omega_{св}$ и возрастает период $T_{св}$. Чем меньше δ по сравнению с ω_0, тем медленнее затухает колебательный процесс и тем ближе частота собственных колебаний $\omega_{св}$ к резонансной частоте ω_0.

Напряжение u_C колеблется с той же частотой с затуханием амплитуды около своего установившегося значения U. Оно достигает наибольшего значения примерно через половину периода после включения цепи и не может превзойти $2U$.

В момент коммутации $u_C(0) = 0$, $u_R(0) = 0$, следовательно, напряжение на индуктивности $u_L(0) = U$ и далее оно затухает, колеблясь относительно оси времени.

Величина $1/\delta = 2L/R = \tau$ называется постоянной времени колебательного контура. Геометрический смысл постоянной времени колебательного контура заключается в том, что величина τ численно равна длине подкасательной к огибающей тока (рис. 8.5).

Колебания возникают вследствие периодического преобразования энергии электрического поля емкости в энергию магнитного поля индуктивности и обратно, причем эти колебания сопровождаются потерей энергии в виде тепла на сопротивлении *R*.

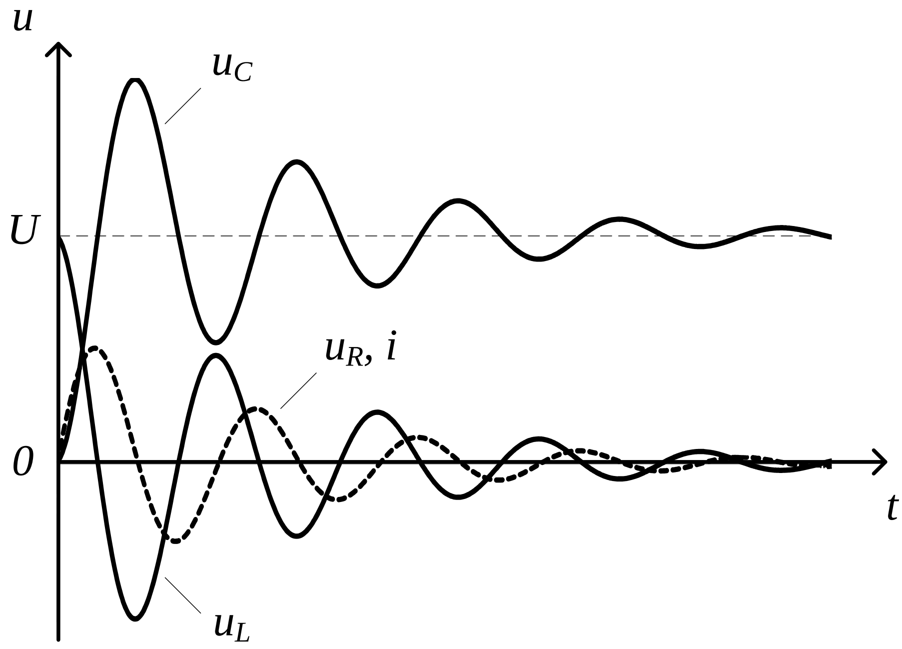

Рис. 8.6. Графические зависимости напряжений во время переходного процесса в колебательном режиме

Скорость затухания колебаний принято оценивать декрементом колебания Δ. Декрементом колебания называется отношение двух последующих амплитуд напряжения или тока одного знака:

$$\Delta = \frac{u_R(t)}{u_R(t + T_{св})} = e^{\delta T_{св}}. \tag{8.31}$$

Декремент колебания не зависит от времени, он определяется лишь параметрами цепи.

После завершения переходного процесса, независимо от его характера, ток в цепи будет равен нулю, а напряжение на емкости будет равно напряжению источника.

Критический режим реализуется при $\delta = \omega_0$ ($R = R_{кр}$), т. е. при $Q = 0{,}5$. Корни характеристического уравнения (8.4) будут действительными и равными между собой:

$$p_1 = p_2 = -\delta = -\frac{R}{2L}. \qquad (8.32)$$

Критический режим можно назвать границей межу апериодическим и колебательным режимами. Кривые i, U_C, U_L по форме не отличаются от графиков зависимостей, приведенных на рис. 8.3, однако переменные быстрее возрастают и убывают.

При подаче прямоугольного положительного импульса амплитудой U и длительностью $t_и$ на цепь R, L, C в контуре возникает переходный процесс, полностью аналогичный рассмотренному случаю подключения цепи к источнику постоянного напряжения. После окончания импульса начинается разряд заряженного конденсатора на цепь R, L. Уравнение второго закона Кирхгофа для цепи разряда конденсатора получается однородным:

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0 \qquad (8.33)$$

Ток и напряжения во время переходного процесса определяются только свободными составляющими. Постоянные интегрирования при апериодическом и колебательном процессах будут такими же, как при заряде конденсатора, но с обратным знаком.

ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

1. На лабораторном стенде соберите электрическую схему, приведенную на рис. 8.7, содержащую последовательно включенные переменный резистор с сопротивлением до 4,7 кОм, индуктивность L= 1 – 10 мГн и конденсатор C = 4,7 – 10 нФ.

Установите на генераторе амплитуду прямоугольных импульсов U = 2 В. Длительность импульса $t_и$ и период выбираются такими, чтобы они превышали длительность переходных процессов в исследуемой электрической цепи.

Подключите выход генератора импульсов ко входу I канала осциллографа и добейтесь устойчивого изображения сигнала осциллографа. Подключите выход генератора и вход I канала осциллографа ко входу схемы, а канал II осциллографа – к резистору R. Движок переменного резистора R установите в среднее положение.

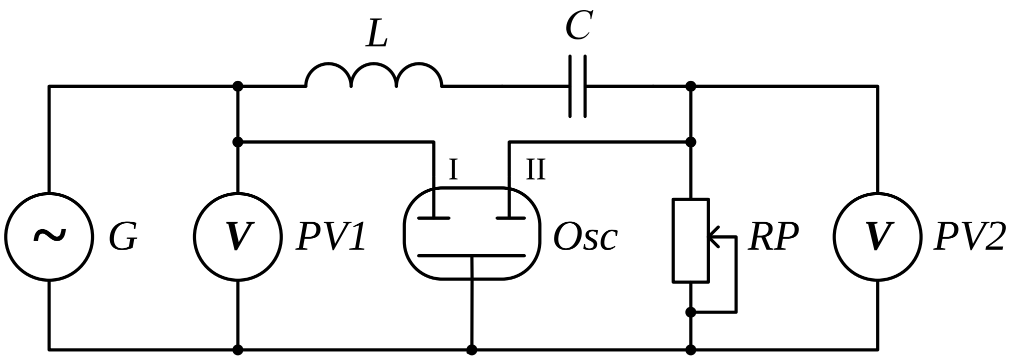

Рис. 8.7. G – генератор сигналов синусоидальной формы; $PV1$, $PV2$ – вольтметры; L, C – индуктивность и емкость соответственно; RP – переменный резистор; Osc – осциллограф

Необходимо, чтобы элемент схемы, с которого снимается напряжение осциллографом, имел общую нулевую точку с генератором и осциллографом.

2. Установите на экране осциллографа устойчивое изображение напряжений $u_{вх}$ и u_R . Рассчитайте величину критического сопротивления $R_{кр}$.

По осциллограмме напряжения u_R с помощью переменного резистора R подберите величину критического сопротивления $R_{кр}$, при котором колебательный режим сменится критическим апериодическим. Отключите переменный резистор от цепи. Измерьте омметром сопротивление $R_{кр}$, сравните с расчетной величиной. Запишите результаты измерения и расчета в табл. 8.

3. Для исследования апериодического режима установите $R > R_{кр}$. Измерьте это сопротивление, результаты запишите в табл. 8.

Зарисуйте с указанием масштабов по осям на одном рисунке осциллограммы напряжений $U_{вх}$, u_R , u_C, u_L .

По соответствующим осциллограммам определите: момент времени t_1, при котором ток имеет максимум, а $u_L = 0$; напряжение на резисторе u_R (t_1), конденсаторе u_C (t_1); момент времени t_2, который соответствует отрицательному максимуму напряжения u_L; напряжение на конденсаторе u_C ($t_и$), где $t_и$ – длительность импульса. Результаты измерений запишите в табл. 8.

4. Для исследования колебательного режима установите $R < R_{кр}$. Измерьте это сопротивление омметром, результаты запишите в табл. 9.

Зарисуйте с указанием масштабов по осям на одном рисунке осциллограммы напряжений $U_{вх}$, u_R , u_C, u_L .

По соответствующим осциллограммам определите: период свободных затухающих колебаний $T_{св}$; угловую частоту свободных колебаний $\omega_{св}$; момент времени t_1, при котором напряжение на конденсаторе достигает максимального значения, и напряжение u_C (t_1); декремент колебания Δ.

Результаты измерений запишите в табл. 9.

Таблица 8

<table>
<tr><td colspan="10">Апериодический режим</td></tr>
<tr><td colspan="10">Измерено</td></tr>
<tr><td>$R_{кр}$, Ом</td><td>R, Ом</td><td>t_1, мкс</td><td>t_2, мкс</td><td colspan="2">u_R (t_1), В</td><td>i (t_1), мА</td><td>u_C (t_1), В</td><td colspan="2">u_C ($t_и$), В</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2"></td><td></td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="10">Рассчитано</td></tr>
<tr><td>$R_{кр}$, Ом</td><td>δ, с$^{-1}$</td><td>ω_0, с$^{-1}$</td><td>p_1, с$^{-1}$</td><td>p_2, с$^{-1}$</td><td>t_1, мкс</td><td>t_2, мкс</td><td>i(t_1), мА</td><td>u_R(t_1), В</td><td>u_C(t_1), В</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Таблица 9

<table>
<tr><td colspan="24">Колебательный режим</td></tr>
<tr><td colspan="24">Измерено</td></tr>
<tr><td colspan="4">R, Ом</td><td colspan="4">$T_{св}$, мкс</td><td colspan="4">$\omega_{св}$, с$^{-1}$</td><td colspan="4">t_1, мкс</td><td colspan="4">$u_C(t_1)$, В</td><td colspan="4">Δ</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="24">Рассчитано</td></tr>
<tr><td colspan="3">δ, с$^{-1}$</td><td colspan="3">τ, мкс</td><td colspan="3">$\omega_{св}$, с$^{-1}$</td><td colspan="3">$T_{св}$, мкс</td><td colspan="3">$u_C(t_1)$, В</td><td colspan="3">Δ</td><td colspan="3">p_1, с$^{-1}$</td><td colspan="3">p_2, с$^{-1}$</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

Содержание отчета

1. Исследуемые схемы, таблицы с результатами измерений и вычислений.

2. Расчет критического сопротивления $R_{кр}$ и экспериментальное определение его с объяснением.

3. Осциллограммы напряжений $U_{вх}$, u_R , u_C, u_L для апериодического режима на одном рисунке с указанием масштабов по осям и обозначением моментов времени t_1, t_2 в соответствии с п.3. Расчетные формулы для определения соответствующих параметров и результаты вычислений, записанные в табл. 8.

4. Осциллограммы напряжений $U_{вх}$, u_R , u_C, u_L для колебательного режима с необходимыми обозначениями в соответствии с п.4. Расчетные формулы для определения соответствующих параметров и результаты вычислений, записанные в табл. 9.

Контрольные вопросы

1. Что такое критическое сопротивление, как оно рассчитывается и определяется экспериментально?

2. Какие условия нужны для возникновения апериодического и колебательного переходного процесса при подключении RLC-цепи к источнику постоянного напряжения?

3. Почему возникают затухающие колебания переходного тока и переходных напряжений в RLC-цепи?

4. Что такое декремент колебания? Как он рассчитывается и определяется экспериментально?

5. Как рассчитать переходный ток в апериодическом режиме при подключении *RLC*-цепи к источнику постоянного напряжения?

6. Как рассчитать постоянную времени апериодического и колебательного переходного процесса?

Рекомендуемая литература

Попов В.П. Основы теории цепей. М.: Юрайт, 2017.

Новожилов О.П. Электротехника (теория электрических цепей). Люберцы: Юрайт, 2016.