ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНОЙ *RC*-ЦЕПИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Цель работы:

– исследовать переходные процессы в линейной RC-цепи при подключению к источнику постоянного напряжения;

– установить влияние параметров исследуемой цепи на характер переходного процесса;

– исследовать и измерить параметры переходного процесса помощью электронного осциллографа.

Краткая теория

В установившемся режиме в электрической цепи в момент времени t индуктивные и емкостные элементы обладают определенным запасом энергии:

$$w_C(t) = \frac{C \cdot u_C(t)^2}{2}\ , \tag{6.1}$$

$$w_L(t) = \frac{L \cdot i_L(t)^2}{2}\ . \tag{6.2}$$

В случае мгновенного изменения какого-либо из параметров цепи (отключение или подключение ветвей, изменение режима работы воздействующего источника энергии, изменение состояния какого-либо элемента цепи) новый режим не может установиться мгновенно. Для установления нового равновесного режима требуется некоторый конечный интервал времени, в течение которого происходит так называемый переходный процесс.

Переходным процессом будем называть переход из одного установившегося состояния электрической цепи в другое после коммутации**.**

Коммутацией называется мгновенное изменение состояния или режима работы электрической цепи, вызванное мгновенным изменения топологии цепи, либо параметра какого-либо из её элементов, либо вида закона напряжения (тока), воздействующего на цепь**.** В момент коммутации начинается перераспределение энергии между реактивными элементами и источниками энергии, при этом часть электрической энергии может быть необратимо преобразована в другие виды энергии на активных элементах.

Определение токов и напряжений при переходных процессах имеет большое практическое значение, так как они могут в отдельных случаях в десятки раз превышать номинальные значения токов и напряжений в установившемся режиме, что может привести к повреждению элементов цепи.

Анализ переходных процессов классическим методом сводится к решению дифференциальных уравнений, составленных для цепи после коммутации на основе законов Кирхгофа. Поскольку законы изменения токов и напряжений в цепи в переходном процессе неизвестны и подлежат определению, то связи между током и напряжением на индуктивном и емкостном элементах необходимо включать в уравнения цепи в общей форме:

$$i_C = C\frac{du_C}{dt}\ , \tag{6.3}$$

$$u_L = L\frac{di_L}{dt}\ . \tag{6.4}$$

Начальными условиями будем называть значения токов и напряжений цепи в момент $t = 0$ непосредственно после коммутации. Начальные условия определяются в результате анализа цепи непосредственно перед коммутацией (момент времени t_{-}) и непосредственно после коммутации (момент времени t_{+}) с использованием законов коммутации.

Закон коммутации для емкостного элемента гласит, что напряжение емкостного элемента непосредственно перед коммутацией равно напряжению емкостного элемента непосредственно после коммутации:

$$u_C(t_+) = u_C(t_-). \qquad (6.5)$$

Закон коммутации для емкостного элемента следует из того, что напряжение на емкости не может измениться скачком. Согласно (6.3) мгновенное изменение напряжения емкости на конечную величину потребовало бы бесконечного приращения тока. Другими словами, для мгновенного изменения энергии, запасенной в электрическом поле конденсатора (см. 6.1), потребовался бы источник энергии бесконечной мощности. Аналогично формулируется закон коммутации для индуктивного элемента.

Закон коммутации для индуктивного элемента утверждает, что ток индуктивного элемента непосредственно перед коммутацией равен току индуктивного элемента непосредственно после коммутации:

$$i_L(t_+) = i_L(t_-). \qquad (6.6)$$

Закон коммутации для индуктивного элемента является следствием того, что ток индуктивности не может измениться скачком. Согласно (6.4) мгновенное изменение тока индуктивности на конечную величину потребовало бы бесконечного приращения напряжения на индуктивности. Другими словами, для мгновенного изменения энергии, запасенной в магнитном поле катушки индуктивности (см. 6.2), потребовался бы источник энергии бесконечной мощности.

Для других величин (токов и напряжений на резисторах, токов в конденсаторах и напряжений на катушках) непрерывность в момент коммутации в общем случае не имеет места.

Для расчётов переходных процессов в исследуемой электрической цепи составляют уравнение относительно тока или напряжения на основе закона Ома, I и II законов Кирхгофа. Результирующее уравнение представляет собой интегрально-дифференциальное уравнение, которое путем дифференцирования может быть преобразовано к только дифференциальному. Порядок дифференциального уравнения ν определяется порядком сложности цепи.

Порядок сложности цепи ν (или *порядок цепи*) – число, равное числу реактивных элементов цепи, энергетическое состояние которых может быть задано независимо:

$$\nu = n_{LC} - n_{\text{ек}} - n_{\text{ис}}, \qquad (6.7)$$

где n_{LC} – общее количество реактивных элементов цепи; $n_{\text{ек}}$ – число емкостных контуров; $n_{\text{ис}}$ – число индуктивных сечений.

В общем виде дифференциальное уравнение линейной цепи с сосредоточенными параметрами является неоднородным:

$$a_\nu \frac{d^\nu s(t)}{dt^\nu} + a_{\nu-1} \frac{d^{\nu-1} s(t)}{dt^{\nu-1}} + \ldots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = f(t), \qquad (6.8)$$

где a_ν – коэффициенты, определяемые параметрами пассивных компонентов цепи или источников энергии; $s(t)$ – искомая реакция цепи, т.е. ток $i(t)$ или напряжение $u(t)$; $f(t)$ – функция, описывающая внешнее воздействие на цепь, причем при отключении всех источников $f(t) = 0$.

Решение неоднородного дифференциального уравнения (6.8) классическим методом складывается из частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения:

$$a_\nu \frac{d^\nu s(t)}{dt^\nu} + a_{\nu-1} \frac{d^{\nu-1} s(t)}{dt^{\nu-1}} + \ldots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = 0. \qquad (6.9)$$

Решение однородного уравнения (6.9) соответствует «свободным», т. е. не зависящим от внешних источников энергии процессам в исследуемой электрической цепи. К ним относятся процессы, протекающие в цепи за счет перераспределения электрической и магнитной энергии, запасённой в индуктивных и емкостных элементах.

Свободными называются процессы в электрической цепи, не зависящие от внешнего воздействия на цепь, но протекающие за счет разности энергий, соответствующих установившимся режимам цепи до и после коммутации.

В реальных электрических цепях такие процессы обязательно сопровождаются рассеянием электромагнитной энергии, её преобразованием в тепловую. В результате электрическая и магнитная энергии, запасенные в соответствующих элементах цепи, со временем будут рассеяны и, следовательно, свободные электромагнитные процессы в цепи через определённый промежуток времени прекратятся.

Решение однородного дифференциального уравнения (6.9) классическим методом находят в виде суммы экспонент:

$$s_{\text{св}}(t) = A_\nu e^{p_\nu t} + A_{\nu-1} e^{p_{\nu-1} t} + \ldots + A_1 e^{p_1 t} = \sum_{i=1}^{\nu} A_i e^{p_i t}, \quad (6.10)$$

где $s_{\text{св}}(t)$ – свободная составляющая искомой реакции цепи; A_i – постоянные интегрирования; p_i – ν корней характеристического уравнения:

$$a_\nu p^\nu + a_{\nu-1} p^{\nu-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (6.11)$$

Таким образом, каждому корню характеристического уравнения (в случае, если корни не кратные) соответствует слагаемое:

$$s_{\text{св}i}(t) = A_i e^{p_i t} \quad (6.12)$$

при i, равном от 1 до ν.

Поскольку в правой части уравнения (6.8) находится функция $f(t)$**,** описывающая внешнее воздействие источников тока или напряжения на цепь, т. е. внешней «вынуждающей» силы, то частное решение дифференциального уравнения (6.8), найденное в результате анализа установившегося режима после коммутации, называется вынужденной составляющей тока или напряжения $s_{\text{вын}}(t)$**.** Таким образом, установившийся режим в исследуемой цепи определяет временные зависимости тока и напряжения в ней после окончания переходных процессов.

В результате токи и напряжения в электрической цепи будут определяться в виде суммы свободных и вынужденных, или установившихся, составляющих:

$$s(t) = s_{\text{св}}(t) + s_{\text{вын}}(t). \qquad (6.13)$$

Проведем расчет переходного тока и напряжения классическим методом в последовательной цепи, состоящей из резистора R и конденсатора C, а также источника постоянного напряжения E с напряжением U_0 (рис. 6.1). Коммутация в такой цепи осуществляется с помощью ключа S.

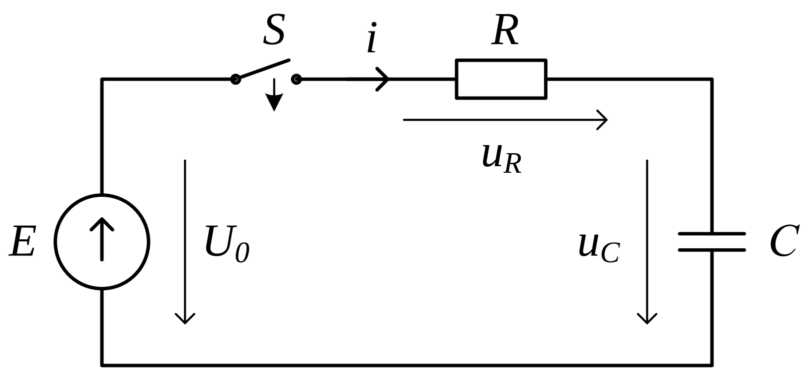

Рис. 6.1. Схема для расчета переходного тока и напряжения при подключении последовательной RC-цепи к источнику напряжения: E – источник постоянного напряжения; S – ключ; R – резистор; C – конденсатор

При анализе переходного процесса, вызванного подключением RC-цепи к источнику напряжения U_0 посредством ключа S составим по I закону Кирхгофа уравнение равновесия цепи после коммутации, т. е. при замкнутом ключе:

$$U_0 = u_R + u_C = iR + u_C\,. \qquad (6.14)$$

С учетом (6.3) исключим ток и сведем выражение к уравнению относительно переменной состояния u_C:

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U_0. \qquad (6.15)$$

Общее решение полученного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид суммы частного решения неоднородного и общего решения однородного уравнений:

$$u_C = u_{св} + u_{вын}. \qquad (6.16)$$

Для нахождения общего решения однородного уравнения составим характеристическое уравнение $RCp + 1 = 0$, корнем которого является $p = -1/RC$. Общее решение однородного уравнения — *свободная составляющая* напряжения $u_{св}$ — соответствует цепи с исключенным источником

$$u_{св} = A\, e^{-t/\tau}, \qquad (6.17)$$

где A — пока неопределенная константа; $\tau = RC$ — величина, имеющая размерность времени, характеризующая скорость протекания переходного процесса, так называемая *постоянная времени*. Свободная составляющая $u_{св} = A\, e^{-t/\tau}$ с течением времени затухает.

При заряде конденсатора от источника постоянного напряжения E к концу переходного процесса на конденсаторе установится напряжение источника U_0, т. е. $u_{вын} = U_0$. Отсюда

$$u_C = U_0 + A\, e^{-t/\tau}. \qquad (6.18)$$

Для определения постоянной A используем начальное условие. Согласно закону коммутации, напряжение на конденсаторе в момент замыкания ключа остается непрерывным. Поэтому если в исходном состоянии до замыкания ключа конденсатор не был заряжен ($u_C(t_-) = 0$), то это же нулевое значение u_C сохранит и непосредственно после замыкания. Из последнего выражения при $t = 0$ имеем

$$u_C\,(t_+) = U_0 + A = u_C\,(t_-) = 0. \qquad (6.19)$$

Отсюда найдем $A = -U_0$ и запишем окончательно

$$u_C(t) = U_0(1 - e^{-t/\tau}). \qquad (6.20)$$

Из исходных уравнений цепи получим для тока:

$$i = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (6.21)$$

Характер изменения тока и напряжения при подключении *RC*-цепи к источнику постоянного напряжения изображен на рис. 6.2.

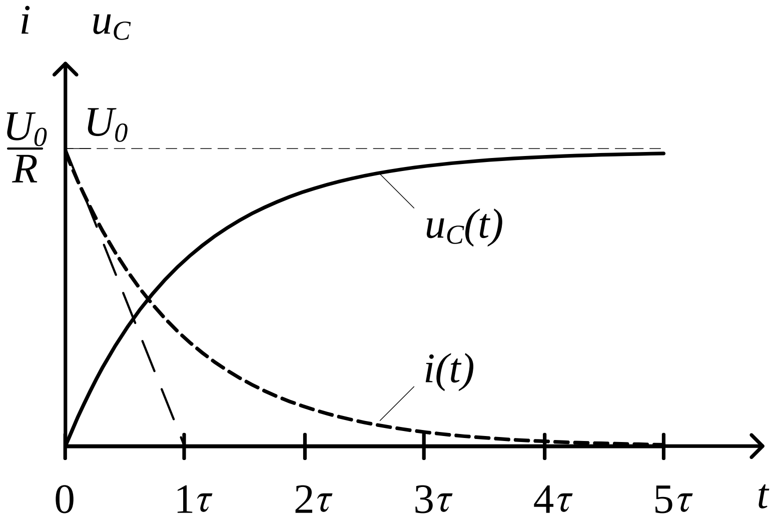

Рис. 6.2. Зависимости изменения тока и напряжения от времени при подключении *RC*-цепи к источнику постоянного напряжения

Значение тока, содержащее лишь свободную составляющую, максимально в начальный момент времени, когда оно скачком достигает значения U_0/R и все напряжение источника приложено к резистору. По мере зарядки конденсатора напряжение на нем повышается, это ведет к соответственному уменьшению тока в цепи. Скорость этих процессов определяется постоянной времени τ. Она определяет время, за которое происходила бы зарядка конденсатора, если бы скорость зарядки сохранялась постоянной и равной ее значению в начале процесса (рис. 6.2). Так как скорость зарядки замедляется по мере увеличения напряжения, то за время, равное постоянной времени $t = \tau$, свободные составляющие уменьшаются по сравнению со своим начальным значением в e = 2,718 раза. За время $t = 3\tau$ свободные составляющие затухают в $e^3 \approx 20$ раз, а за время $t = 5\tau$ – в $e^5 \approx$ 150 раз. Другими словами можно сказать, что за время $t = 3\tau$ на конденсаторе устанавливается напряжение u_C, равное напряжению источника U_0 с точностью 5%, а за время $t = 5\tau$ – с точностью 1%.

Рассмотрим случай, когда конденсатор до коммутации заряжен до напряжения U_0, а в результате коммутации происходит разряд конденсатора на резистор (рис. 6.3).

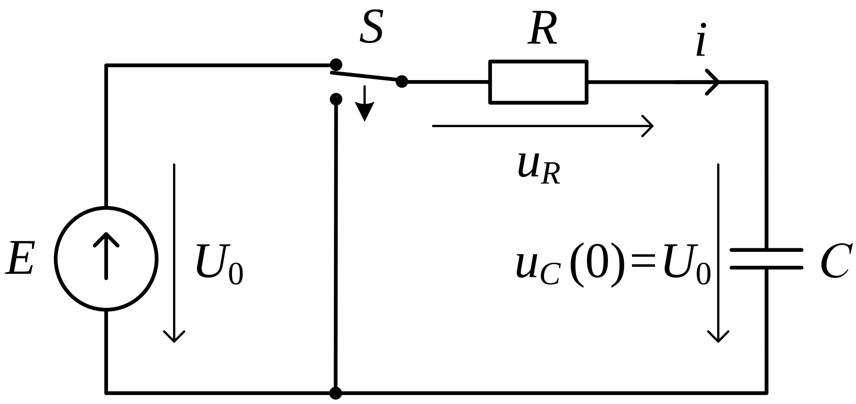

Рис. 6.3. Схема для расчета переходного тока и напряжения при разряде конденсатора C на резистор R: S – ключ; R – резистор; C – конденсатор

Для расчета тока и напряжения при разряде конденсатора в уравнении (6.14) следует положить $U_0 = 0$, что приводит его к однородному уравнению:

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0. \qquad (6.22)$$

Напряжения и токи содержат лишь свободные составляющие. Общее решение уравнения (6.22) имеет вид

$$u_C = A\,e^{-t/\tau}, \qquad (6.23)$$

где константы A и τ сохраняют прежний смысл.

Для определения значения A используем начальное условие – значение напряжения $u_C(0) = U_0$, до которого конденсатор был заряжен к моменту замыкания ключа. При $t = 0$ имеем

$$u_C\,(0) = U_0 = A, \qquad (6.24)$$

и окончательно для напряжения u_C запишем

$$u_C(t) = U_0\, e^{-t/\tau} \qquad (6.25)$$

Значение тока разряда определим из напряжения по закону Ома:

$$i = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (6.26)$$

Соответствующие кривые изображены на рис. 6.4. Напряжение на конденсаторе непрерывно в момент коммутации и уменьшается по экспоненциальному закону от начального значения U_0. Скорость протекания разряда определяется постоянной времени $\tau = RC$.

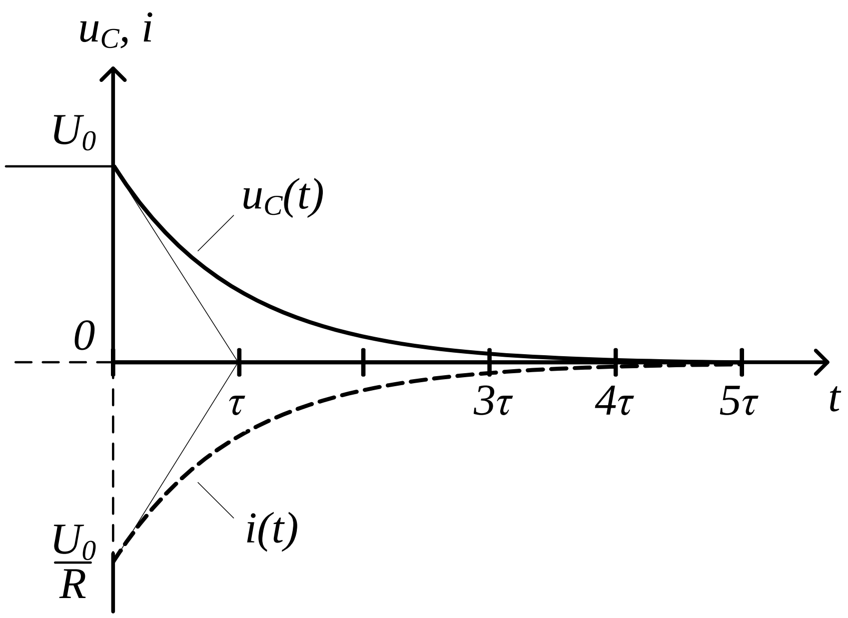

Рис. 6.4. Зависимости изменения тока и напряжения от времени при разряде конденсатора C на резистор R

ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

1. Измерение постоянной времени τ и напряжения на конденсаторе при заряде конденсатора от источника постоянного напряжения.

1.1. Соберите схему для измерения параметров переходного процесса и постоянной времени τ *RC*-цепи, приведенную на рис. 6.5.

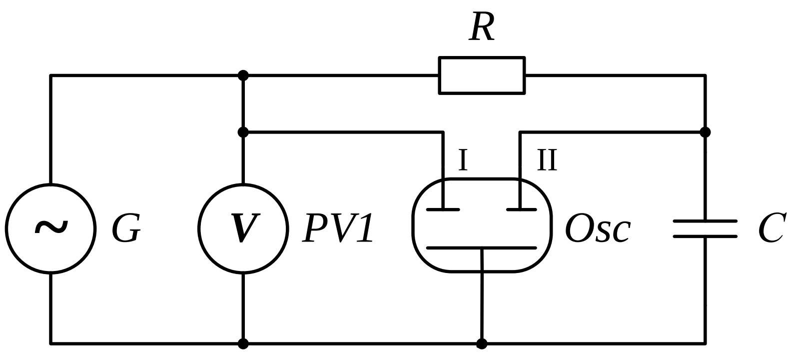

Рис. 6.5. Схема для измерения параметров переходного процесса и постоянной времени τ *RC*-цепи: *G* – генератор сигналов прямоугольной формы; *PV*1 – вольтметр; *C* – конденсатор; *R* – резистор; *Osc* – осциллограф

В данной лабораторной работе для моделирования коммутационного процесса используется выходное напряжение генератора импульсов прямоугольной формы. Длительность импульсов генератора выбирается так, чтобы время переходного процесса было много меньше длительности импульса. Практически этого можно добиться, установив длительность импульса генератора *G* таким образом, чтобы время нарастания сигнала на конденсаторе *C* от уровня 0,1 до уровня 0,9 от амплитуды входного прямоугольного импульса (или, другими словами, длительность переднего фронта $\tau_ф$ импульса на конденсаторе) была на порядок меньше длительности самого импульса $\tau_и$. Выполнив это требование, можно считать процесс нарастания напряжения на конденсаторе переходным процессом, совпадающим с подключением цепи к источнику постоянного напряжения идеальным ключом.

Таким образом, при $\tau_ф \ll \tau_и$ источник напряжения в виде генератора *G* можно считать постоянным. Переходный процесс наблюдается в цепи от момента подачи прямоугольного импульса на вход цепи и до достижения напряжением на конденсаторе амплитудного значения входного импульса.

1.2. Рассчитайте постоянную времени цепи τ по номиналам полученных от преподавателя резистора и конденсатора. Установите на генераторе импульсов амплитуду прямоугольных импульсов U_0 = 1 В, период следования импульсов T = 10 τ. Синхронизируйте вход канала I осциллографа от генератора импульсов, добейтесь устойчивого изображения сигнала. Оцените длительность переднего фронта $\tau_ф$ импульса на конденсаторе с помощью канала II осциллографа, при необходимости откорректируйте длительность импульса.

Зарисуйте с экрана осциллографа осциллограммы входного прямоугольного импульса U_0 (t) и напряжения u_C, укажите масштабы по осям. Отметьте на осциллограммах параметры импульсов на выходе *RC*-цепи: период *T*, амплитуду *A*, длительность фронта выходного импульса $\tau_ф$ (рис. 6.6).

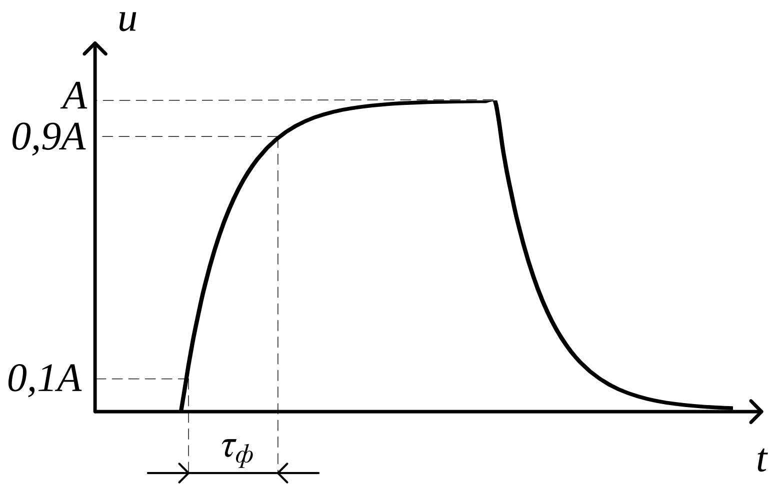

Рис. 6.6. Амплитуда *A* и длительность фронта $\tau_ф$ выходного импульса на конденсаторе *RC*-цепи

Сравните измеренное значение длительности фронта $\tau_ф$ с определенным по формуле

$$\tau_ф = 2{,}2\,RC. \qquad (6.27)$$

1.3. Замените резистор на другой, с большим сопротивлением. Повторите опыт п. 1.2, зарисуйте соответствующие осциллограммы, отметьте на них параметры импульсов на входе и выходе цепи.

2. Измерение постоянной времени τ и напряжения на резисторе при разряде конденсатора на резистор.

2.1. Поменяйте местами конденсатор *C* и резистор *R* в схеме, приведенной на рис. 6.5. В данном задании переходным процессом будет разряд конденсатора на резистор, поэтому в нем проводятся измерения параметров не фронта, а *среза* импульса (рис.6.7).

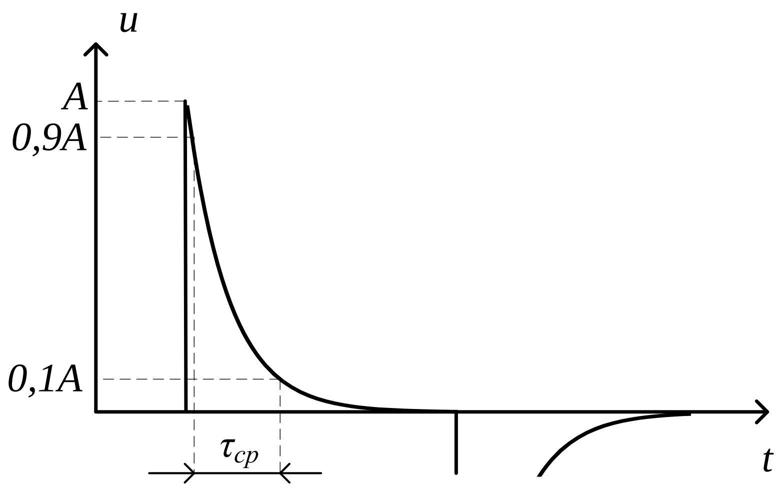

Рис. 6.7. Амплитуда *A* и длительность среза $\tau_{ср}$ выходного импульса на резисторе *RC*-цепи

2.2. По алгоритму п. 1 практического задания с учетом п. 2.1 исследуйте переходные процессы в цепи при двух различных номиналах резисторов.

Содержание отчета

1. Принципиальные схемы лабораторных установок для изучения переходных процессов в *RC*-цепи.

2. Для каждого из вариантов соединений *R* и *C* и номиналов резисторов *R*:

– расчетное значение τ;

– осциллограммы входного и выходного напряжений с указанием масштабов по осям;

– значения периода T, амплитуды A, длительность входного импульса $\tau_и$ и длительность фронта $\tau_ф$ и среза $\tau_{ср}$ выходного импульса.

3. Выводы на основе анализа результатов расчета и эксперимента.

Контрольные вопросы

1. В чем причина возникновения переходных процессов?
2. Как формулируются законы коммутации?
3. На каких физических принципах базируются законы коммутации?
4. В чем суть классического метода расчета переходных процессов?
5. Как определить независимые и зависимые начальные условия, вынужденные величины?
6. Как определить постоянные интегрирования в классическом методе расчета переходных процессов?
7. Что такое постоянная времени цепи первого порядка и как ее определить графически по экспериментальным кривым тока (напряжения)? Каков её физический смысл?
8. Чему равна постоянная времени в *RC* цепи?
9. Как составляется характеристическое уравнение и для чего оно необходимо?
10. Как вывести формулы для расчета токов и напряжений в переходном процессе для исследуемых схем?
11. Как вывести формулу для длительности фронта (среза) импульса при коммутационном процессе?

Рекомендуемая литература

Попов В.П. Основы теории цепей. М.: Юрайт, 2017.

Новгородцев А.Б. Теоретические основы электротехники: 30 лекций по теории электрических цепей. СПб.: Питер, 2006.

Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. М.: Юрайт, 2017.